Γραμμικη Αλγεβρα II

Ασκησεις - Φυλλαδιο 1

Διδασκοντες: Ν. Μαρμαρίδης - Α. Μπεληγιάννης

Βοηθος Ασκησεων: Χ. Ψαρουδάκης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:

http://www.math.uoi.gr/∼abeligia/LinearAlgebraII/LAII.html

21 - 3 - 2012

Άσκηση 1. *Θεωρούμε τους ακόλουθους υπόχωρους του* $\mathbb{R}^4$*:*

$$\mathcal{V} = \big\langle (1,2,1,-1),\ (1,1,1,1) \big\rangle \qquad \textit{και} \qquad \mathcal{W} = \big\langle (-1,1,-1,1),\ (0,1,0,1) \big\rangle$$

(1) *Είναι το άθροισμα* $\mathcal{V} + \mathcal{W}$ *ευθύ;*

(2) *Πόσοι υπόχωροι* $\mathcal{Z}$ *του* $\mathbb{R}^4$ *υπάρχουν έτσι ώστε* $\mathcal{V} \oplus \mathcal{Z} = \mathbb{R}^4$*; Δικαιολογήστε την απάντηση σας.*

Λύση. *Τα σύνολα διανυσμάτων* $\{(1,2,1,-1),(1,1,1,1)\}$ *και* $\{(-1,1,-1,1),(0,1,0,1)\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα και άρα αποτελούν βάσεις αντίστοιχα των υπόχωρων* $\mathcal{V}$ *και* $\mathcal{W}$*. Συνεπώς έχουμε* $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = 2$ *και* $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{W} = 2$*. Ο υπόχωρος* $\mathcal{V}+\mathcal{W} = \langle (1,2,1,-1),(1,1,1,1),(-1,1,-1,1),(0,1,0,1)\rangle$*, αλλά*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 3\Gamma_4]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + \Gamma_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_4 \to \Gamma_4 + \Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \to -\frac{1}{3}\Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και άρα

$$\mathcal{V} + \mathcal{W} = \langle (1,2,1,-1),(0,1,0,1),(0,0,0,1)\rangle$$

Το σύνολο διανυσμάτων $\{(1,2,1,-1),(0,1,0,1),(0,0,0,1)\}$ *αποτελεί βάση του* $\mathcal{V} + \mathcal{W}$*, αφού είναι γραμμικά ανεξάρτητο, και συνεπώς* $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} + \mathcal{W} = 3$*. Τότε*

$$3 = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} + \mathcal{W} \neq \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} + \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{W} = 2 + 2 = 4$$

και επομένως το άθροισμα $\mathcal{V} + \mathcal{W}$ *δεν είναι ευθύ.*

Για το δεύτερο ερώτημα, ζητάμε υπόχωρους $\mathcal{Z}$ *του* $\mathbb{R}^4$ *έτσι ώστε* $\mathcal{V} \oplus \mathcal{Z} = \mathbb{R}^4$*. Αφού* $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = 2$ *θέλουμε επιπλέον δυο διανύσματα γραμμικά ανεξάρτητα με τα* $\{(1,2,1,-1),(1,1,1,1)\}$*. Δηλαδή, θέλουμε να συμπληρώσουμε το παρακάτω πίνακα*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix}$$

με τέτοιο τρόπο ώστε η ορίζουσα του να είναι διάφορη του μηδενός. Θεωρούμε τα διανύσματα $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (0,0,1,0)$ *και* $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = (0,0,0,\lambda)$ *με* $\lambda \neq 0$, *δηλαδή* $\mathcal{Z} = \langle (0,0,1,0), (0,0,0,\lambda) \rangle$. *Τότε εύκολα διαπιστώνουμε ότι το σύνολο*

$$\{(1,2,1,-1), (1,1,1,1), (0,0,1,0), (0,0,0,\lambda)\}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Επομένως, υπάρχουν άπειροι υπόχωροι $\mathcal{Z}$ *του* $\mathbb{R}^4$ *έτσι ώστε* $\mathcal{V} \oplus \mathcal{Z} = \mathbb{R}^4$.
$\square$

Άσκηση 2. *Να εξετάσετε αν ισχύει ότι:* $\mathbb{R}_3[t] = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$, *όπου* $\mathcal{V}$ *και* $\mathcal{W}$ *είναι οι ακόλουθοι υπόχωροι του* $\mathbb{R}_3[t]$:

$$\mathcal{V} = \left\langle 1, t + t^2,\ 2 + 3t + 3t^2 \right\rangle \qquad \text{και} \qquad \mathcal{W} = \left\langle t,\ t^3 \right\rangle$$

Λύση. *Καταρχήν παρατηρούμε ότι*

$$2 + 3t + 3t^2 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot (t + t^2)$$

και άρα

$$\mathcal{V} = \left\langle 1, t + t^2 \right\rangle$$

Τα διανύσματα $1, t + t^2$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα αφού αν*

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot (t + t^2) = 0 &\implies \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot t + \lambda_2 \cdot t^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3 \\ &\implies \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \end{aligned}$$

Συνεπώς $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = 2$. *Όμοια* $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{W} = 2$ *αφού το σύνολο διανυσμάτων* $\{t, t^3\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Για να είναι το άθροισμα ευθύ, δηλαδή για να ισχύει ότι* $\mathbb{R}_3[t] = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$, *θα πρέπει το σύνολο διανυσμάτων*

$$\{1, t + t^2, t, t^3\}$$

να είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Πράγματι, εύκολα διαπιστώνουμε ότι το παραπάνω σύνολο είναι γραμμικά ανεξάρτητο και άρα: $\mathbb{R}_3[t] = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$. $\square$

Άσκηση 3. *Θεωρούμε τα ακόλουθα υποσύνολα του* $\mathbb{R}^4$:

$$\mathcal{W}_1 = \{(t, 2t, -t, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t \in \mathbb{R}\}, \qquad \mathcal{W}_2 = \{(t, s, t - 3s, -s) \in \mathbb{R}^4 \mid t, s \in \mathbb{R}\}$$
$$\mathcal{W}_3 = \{(t, s, 0, r) \in \mathbb{R}^4 \mid t - 2s + r = 0\}$$

(1) *Να δείξετε ότι τα υποσύνολα* $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_3$ *είναι υπόχωροι του* $\mathbb{R}^4$ *και να βρεθεί η διάσταση τους.*
(2) *Να εξετασθεί αν το άθροισμα* $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3$ *είναι ευθύ.*
(3) *Να δείξετε ότι* $\mathbb{R}^4 = \mathcal{W}_1 \oplus (\mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3)$.

Λύση. *Αφού*

$$\mathcal{W}_1 = \langle (1,2,-1,1) \rangle, \quad \mathcal{W}_2 = \langle (1,0,1,0), (0,1,-3,-1) \rangle, \quad \mathcal{W}_3 = \langle (2,1,0,0), (-1,0,0,1) \rangle$$

έπεται ότι τα $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_3$ *είναι υπόχωροι του* $\mathbb{R}^4$. *Επίσης, τα σύνολα διανυσμάτων* $\{(1,0,1,0), (0,1,-3,-1)\}$ *και* $\{(2,1,0,0), (-1,0,0,1)\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα και άρα έχουμε:* $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{W}_1 = 1$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{W}_2 = 2$ *και* $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{W}_3 = 2$. *Ο υπόχωρος* $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3$ *παράγεται από τα διανύσματα*

$$\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3 = \langle (1,2,-1,1), (1,0,1,0), (0,1,-3,-1), (2,1,0,0), (-1,0,0,1) \rangle$$

Όμως τα παραπάνω διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα και $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3) = 4$. *Συνεπώς*

$$4 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3) \neq \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{W}_1 + \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{W}_2 + \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{W}_3 = 1 + 2 + 2 = 5$$

και άρα το άθροισμα $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3$ *δεν είναι ευθύ. Για το τελευταίο ερώτημα, ο υπόχωρος* $\mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3$ *παράγεται από τα διανύσματα*

$$\mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3 = \langle (1,0,1,0), (0,1,-3,-1), (0,0,1,1) \rangle$$

διότι

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4 \to \Gamma_4 + \Gamma_1]{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Τότε

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

και άρα το σύνολο διανυσμάτων $\{1,2,-1,1), (1,0,1,0), (0,1,-3,-1), (0,0,1,1)\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Συνεπώς έχουμε:* $\mathbb{R}^4 = \mathcal{W}_1 \oplus (\mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3)$. $\square$

Άσκηση 4. *Έστω* $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *μια γραμμική απεικόνιση.*

(1) *Αν* $f^2 = f$, *να δείξετε ότι* $\mathcal{E} = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

(2) *Αν* $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$, *να δείξετε ότι* $\mathcal{E} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2$ *όπου:*

$$\mathcal{V}_1 = \{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid f(\vec{x}) = \vec{x}\} \qquad \text{και} \qquad \mathcal{V}_2 = \{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid f(\vec{x}) = -\vec{x}\}$$

Λύση. *Διαγραμματικά έχουμε:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "f^2"'] & \mathcal{E} \arrow[r, "f"] & \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

όπου στην πρώτη περίπτωση ισχύει: $f^2(\vec{x}) = f(f(\vec{x})) = f(\vec{x}), \forall \vec{x} \in \mathcal{E}$, *ενώ στη δεύτερη περίπτωση έχουμε:* $f^2(\vec{x}) = f(f(\vec{x})) = \vec{x}, \forall \vec{x} \in \mathcal{E}$.

(1) *Αφού* $f^2(\vec{x}) = f(\vec{x}), \forall \vec{x} \in \mathcal{E}$, *τότε:*

$$f(f(\vec{x})) = f(\vec{x}) \implies f(f(\vec{x}) - \vec{x}) = \vec{0} \implies f(\vec{x}) - \vec{x} \in \operatorname{Ker} f$$

Άρα το τυχαίο διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{E}$ *γράφεται ως:* $\vec{x} = (\vec{x} - f(\vec{x})) + f(\vec{x}) \in \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$. *Συνεπώς έχουμε:*

$$\mathcal{E} = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f \tag{1}$$

Έστω $\vec{x} \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$, *δηλαδή* $\vec{x} \in \operatorname{Ker} f$ *και* $\vec{x} \in \operatorname{Im} f$. *Άρα* $f(\vec{x}) = \vec{0}$ *και* $f(\vec{y}) = \vec{x}$ *για κάποιο* $\vec{y} \in \mathcal{E}$. *Τότε*

$$f(\vec{x}) = f(f(\vec{y})) = f^2(\vec{y}) = f(\vec{y}) = \vec{x} \implies \vec{x} = \vec{0}$$

και άρα

$$\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{\vec{0}\} \tag{2}$$

Επομένως, από τις σχέσεις (1) *και* (2) *έπεται ότι* $\mathcal{E} = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

(2) Έστω $\vec{x} \in \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$, δηλαδή $\vec{x} \in \mathcal{V}_1$ και $\vec{x} \in \mathcal{V}_2$. Τότε

$$\begin{cases} f(\vec{x}) = \vec{x} \\ f(\vec{x}) = -\vec{x} \end{cases} \implies \vec{x} = -\vec{x} \implies 2\vec{x} = \vec{0} \implies \vec{x} = \vec{0} \implies \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \{\vec{0}\} \qquad (3)$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι κάποιο $\vec{x} \in \mathcal{E}$ γράφεται ως $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ με $\vec{x}_1 \in \mathcal{V}_1$ και $\vec{x}_2 \in \mathcal{V}_2$. Τότε $f(\vec{x}) = f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_2) = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ και άρα

$$\begin{cases} \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \\ f(\vec{x}) = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \end{cases} \implies \begin{cases} 2\vec{x}_1 = \vec{x} + f(\vec{x}) \\ 2\vec{x}_2 = \vec{x} - f(\vec{x}) \end{cases} \implies \begin{cases} \vec{x}_1 = \frac{1}{2}(\vec{x} + f(\vec{x})) \\ \\ \vec{x}_2 = \frac{1}{2}(\vec{x} - f(\vec{x})) \end{cases}$$

Έστω $\vec{x} \in \mathcal{E}$. Τότε

$$\vec{x} = \frac{\vec{x} + f(\vec{x})}{2} + \frac{\vec{x} - f(\vec{x})}{2} \in \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2$$

αφού

$$f(\frac{\vec{x} + f(\vec{x})}{2}) = \frac{1}{2}(f(\vec{x}) + f^2(\vec{x})) = \frac{1}{2}(f(\vec{x}) + \vec{x}) = \frac{\vec{x} + f(\vec{x})}{2}$$

και

$$f(\frac{\vec{x} - f(\vec{x})}{2}) = \frac{1}{2}(f(\vec{x}) - f^2(\vec{x})) = \frac{1}{2}(f(\vec{x}) - \vec{x}) = -(\frac{\vec{x} - f(\vec{x})}{2})$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας τη σχέση $f^2(\vec{x}) = \vec{x}, \forall \vec{x} \in \mathcal{E}$, δείξαμε ότι $\vec{x} \in \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2$. Συνεπώς έχουμε

$$\mathcal{E} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 \qquad (4)$$

Άρα, από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε το ζητούμενο: $\mathcal{E} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2$. □

Άσκηση 5. Έστω ότι $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \cdots, \mathcal{V}_m$ είναι υπόχωροι ενός $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$. Θεωρούμε τον $\mathbb{K}$-διανυσματικό χώρο $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \cdots \times \mathcal{V}_m$ και ορίζουμε μια απεικόνιση

$$f : \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \cdots \times \mathcal{V}_m \longrightarrow \mathcal{E}, \quad f(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m) = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \cdots + \vec{v}_m$$

(1) Να δείξετε ότι η f είναι γραμμική.
(2) Ποιά είναι η εικόνα $\mathrm{Im}(f)$ της f;
(3) Να δείξετε ότι η f είναι μονομορφισμός αν και μόνον αν το άθροισμα $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_m$ είναι ευθύ.
(4) Να δείξετε ότι η f είναι ισομορφισμός αν και μόνον αν $\mathcal{E} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_m$.

Λύση. (1) Έστω $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m), (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_m) \in \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \cdots \times \mathcal{V}_m$ και $\lambda \in \mathbb{K}$. Τότε:

$$\begin{aligned} f((\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m) + (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_m)) &= f(\vec{x}_1 + \vec{y}_1, \vec{x}_2 + \vec{y}_2, \cdots, \vec{x}_m + \vec{y}_m) \\ &= \vec{x}_1 + \vec{y}_1 + \vec{x}_2 + \vec{y}_2 + \cdots + \vec{x}_m + \vec{y}_m \\ &= \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_m + \vec{y}_1 + \vec{y}_2 + \cdots + \vec{y}_m \\ &= f(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m) + f(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_m) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} f(\lambda(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m)) &= f(\lambda\vec{x}_1, \lambda\vec{x}_2, \cdots, \lambda\vec{x}_m) \\ &= \lambda\vec{x}_1 + \lambda\vec{x}_2 + \cdots + \lambda\vec{x}_m \\ &= \lambda(\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_m) \\ &= \lambda f(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m) \end{aligned}$$

Επομένως, η f είναι γραμμική απεικόνιση.

(2) *Η εικόνα* $\mathrm{Im}(f)$ *της* f *είναι*

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} f &= \big\{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid \exists\,(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m) \in \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \cdots \times \mathcal{V}_m : \ f(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m) = \vec{x}\big\} \\ &= \big\{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid \exists\,(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m) \in \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \cdots \times \mathcal{V}_m : \ \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \cdots + \vec{v}_m = \vec{x}\big\} \\ &= \{\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \cdots + \vec{v}_m \in \mathcal{E} \mid \vec{v}_i \in \mathcal{V}_i, \ 1 \leq i \leq m\} \\ &= \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_m\end{aligned}$$

(3) *Έστω ότι η* f *είναι μονομορφισμός. Θα δείξουμε ότι για το άθροισμα* $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_m$ *ισχύει η μοναδικότητα της γραφής. Έστω* $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_m = \vec{y}_1 + \vec{y}_2 + \cdots + \vec{y}_m$ *όπου* $\vec{x}_1, \vec{y}_1 \in \mathcal{V}_1$, $\cdots$, $\vec{x}_m, \vec{y}_m \in \mathcal{V}_m$. *Τότε:*

$$f(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_m) = f(\vec{y}_1, \cdots, \vec{y}_m) \xRightarrow{f:1\text{-}1} (\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_m) = (\vec{y}_1, \cdots, \vec{y}_m)$$

και άρα $\vec{x}_1 = \vec{y}_1, \cdots, \vec{x}_m = \vec{y}_m$. *Επομένως το άθροισμα* $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_m$ *είναι ευθύ.*

Αντίστροφα, έστω $f(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_m) = f(\vec{y}_1, \cdots, \vec{y}_m)$, *δηλαδή* $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_m = \vec{y}_1 + \vec{y}_2 + \cdots + \vec{y}_m$ *όπου* $\vec{x}_1, \vec{y}_1 \in \mathcal{V}_1$, $\cdots$, $\vec{x}_m, \vec{y}_m \in \mathcal{V}_m$. *Τότε αφού ισχύει η μοναδικότητα της γραφής, έπεται άμεσα ότι* $\vec{x}_i = \vec{y}_i$, $1 \leq i \leq m$ *και άρα* $(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_m) = (\vec{y}_1, \cdots, \vec{y}_m)$. *Επομένως η* f *είναι μονομορφισμός.*

(4) *Έστω ότι η* f *είναι ισομορφισμός. Τότε αφού η* f *είναι μονομορφισμός έπεται από το* (3) *ότι το άθροισμα* $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_m$ *είναι ευθύ. Επίσης, η* f *είναι επιμορφισμός και άρα* $\operatorname{Im} f = \mathcal{E}$. *Συνεπώς, από το* (2) *έχουμε ότι* $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_m = \mathcal{E}$. *Άρα:* $\mathcal{E} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_m$.

Αντίστροφα, αν $\mathcal{E} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_m$ *τότε* $\mathcal{E} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_m$ *και το άθροισμα* $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_m$ *είναι ευθύ. Από τα* (2) *και* (3) *έπεται ότι* $\mathcal{E} = \operatorname{Im} f$, *δηλαδή η* f*: επιμορφισμός, και* f*: μονομορφισμός. Επομένως, η γραμμική απεικόνιση* f *είναι ισομορφισμός.* $\square$